第10講　円運動

1

図1のように，支点Oから長さ l [m] の糸につるされた質量 m [kg] の小物体が，鉛直線に対する糸の傾き θ [rad] を一定に保ちながら，水平面内で円運動している円すい振り子がある。ただし，糸の質量と空気の抵抗を無視し，重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

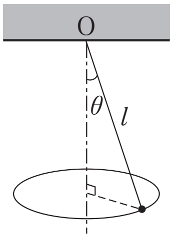
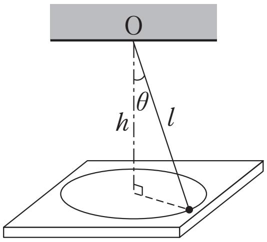


図1

問1　糸の張力を R [N]，回転の角速度を ω [rad/s]，回転半径を r [m] とする。小物体にはたらく鉛直方向の力のつり合いの式は［(1)］で，水平方向の運動方程式は［(2)］である。回転半径 r を l と θ で表すと $r =$［(3)］となる。これらの式から張力 R と回転半径 r を消去すると，角速度は $\omega =$［(4)］で与えられる。この回転運動の周期を T_1 [s] とし，これを l や θ で表すと $T_1 =$［(5)］が得られる。

次に，前の円すい振り子の支点Oから h [m]（ただし $h < l$）だけ下の位置に，図2のように，なめらかで平らな板を水平に置く。この板の上を小物体が，糸がたるまないようにして，一定の角速度 ω [rad/s] で回転している場合を考える。



板
図2

問2　このときの小物体の回転半径を r [m] とし，長さ l [m] の糸の鉛直線に対する角度を θ [rad] とすると，$\cos\theta =$［(6)］，$\sin\theta =$［(7)］である。小物体は板から垂直抗力 N [N]，糸の張力 R [N] を受けているとする。小物体にはたらく力の，鉛直方向の力のつり合いの式は鉛直方向が［(8)］，水平方向の運動方程式が［(9)］となる。回転半径 r と角度 θ をこれらの式から消去すると，糸の張力は $R =$［(10)］となり，垂直抗力は $N =$［(11)］となる。

また，回転の角速度を徐々に増していくと，ある角速度で小物体が板から離れる。

問3　離れた瞬間に垂直抗力は $N =$［(12)］となるので，そのときの角速度で回転する円すい振り子の周期 T_2 [s] を用いて表すと $T_2 =$［(13)］が得られる。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

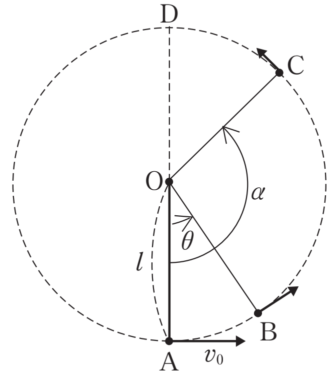
< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

なめらかな支点Oに長さlの軽い糸の一端を固定し，他端には質量mの小球をつりさげた。ここで，点Oを含む鉛直面内での小球の運動を考える。図のように，最下点Aで静止している小球を，水平方向に速さv_0で打ち出したところ，小球はOを中心とする半径lの円周上を糸がたるむことなく運動し始めた。重力加速度の大きさをgとし，小球の大きさは無視できるものとして，以下の問に答えよ。



(1)　鉛直下方と角θをなす円周上の点Bを，小球が速さv，糸の張力Sで通過するとき，

ア　点Aを位置エネルギーの基準にとると，点Bにおける小球の位置エネルギーはいくらか。m，g，l，θを用いて表せ。

イ　点Aから打ち出された直後の小球の運動エネルギーと，点Bを通過するときの力学的エネルギーとの間に成り立つ関係式を書け。

ウ　小球について円運動の方程式を張力Sとm，g，θ，v，lを用いて表せ。

エ　糸にはたらく張力をm，g，l，v_0，θを用いて表せ。

(2)　小球が円軌道から離れずに，円周上の最高点Dを通過して円運動を続けるために必要なv_0の最小値を求めよ。

(3)　小球が円周上のある点Cを通過した瞬間に糸がたるみ始め，その後，小球は円軌道から離れたとする。そのときの，点Cの鉛直下方からの角をα $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$として，打ち出されたときの速さ$v_0$を$l$，$g$，$\alpha$を用いて表せ。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

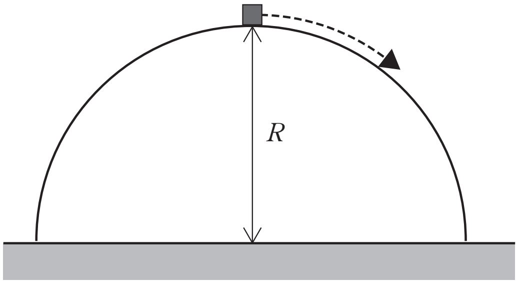
< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

水平面上に固定された半径 R の半球面の頂上から，静止していた小さな物体がすべり落ちた。重力加速度の大きさを g とすると，この物体が半球面から離れる瞬間の速さはいくらか。正しいものを，以下の①～⑧のうちから一つ選べ。ただし，半球面と物体の間の摩擦および空気の抵抗は無視できるものとする。



① $\sqrt{2gR}$　② $\sqrt{\dfrac{3gR}{2}}$　③ $\sqrt{gR}$　④ $\sqrt{\dfrac{2gR}{3}}$

⑤ $\sqrt{\dfrac{gR}{2}}$　⑥ $\sqrt{\dfrac{gR}{3}}$　⑦ $\dfrac{1}{2}\sqrt{gR}$　⑧ $\dfrac{1}{3}\sqrt{2gR}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

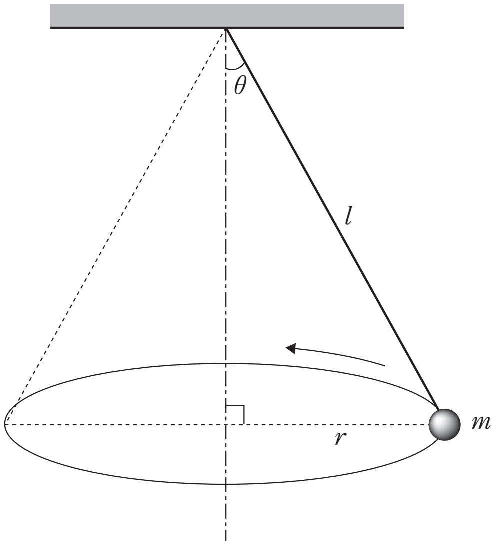
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　確認テスト

次の文を読み，下の各問に答えよ。ただし，問に対しては最も適当な答えをそれぞれの解答群から一つ選びなさい。また，重力加速度の大きさは g [m/s^2] とする。

図に示すように，長さ l [m] の伸び縮みのしないじょうぶな軽い糸の一端を天井に固定し，他端に質量 m [kg] のおもりをつるし，このおもりを水平面内で半径 r [m] の等速円運動をさせる。糸が鉛直線となす角 θ [rad] は一定として，以下の問に答えよ。



問１．糸がおもりを引く力の大きさを m，θ と g を用いて表せ。

解答群

(ア) $mg\sin\theta$　(イ) $mg\cos\theta$　(ウ) $mg\tan\theta$　(エ) $\dfrac{mg}{\sin\theta}$

(オ) $\dfrac{mg}{\cos\theta}$　(カ) $\dfrac{mg}{\tan\theta}$

問２．おもりの加速度はどの向きにはたらくか。

解答群

(ア) 等速円運動の中心から遠ざかる向き

(イ) 鉛直上向き

(ウ) 等速円運動の中心へ向かう向き

(エ) 鉛直下向き

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問3．おもりの回転の向心力の大きさを m，θ と g を用いて表せ。

解答群

(ア) $mg\sin\theta$　(イ) $mg\cos\theta$　(ウ) $mg\tan\theta$　(エ) $\dfrac{mg}{\sin\theta}$

(オ) $\dfrac{mg}{\cos\theta}$　(カ) $\dfrac{mg}{\tan\theta}$

問4．おもりの回転の半径 r は何 m か。l と θ を用いて表せ。

解答群

(ア) $l\sin\theta$　(イ) $l\cos\theta$　(ウ) $l\tan\theta$　(エ) $\dfrac{l}{\sin\theta}$

(オ) $\dfrac{l}{\cos\theta}$　(カ) $\dfrac{l}{\tan\theta}$

問5．おもりの回転の角速度の大きさは何 rad/s か。r，θ と g を用いて表せ。

解答群

(ア) $\sqrt{\dfrac{r}{g\sin\theta}}$　(イ) $\sqrt{\dfrac{r}{g\cos\theta}}$　(ウ) $\sqrt{\dfrac{r}{g\tan\theta}}$　(エ) $\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{r}}$

(オ) $\sqrt{\dfrac{g\cos\theta}{r}}$　(カ) $\sqrt{\dfrac{g\tan\theta}{r}}$

問6．おもりの回転の周期は何秒か。r，θ と g を用いて表せ。

解答群

(ア) $2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g\sin\theta}}$　(イ) $2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g\cos\theta}}$　(ウ) $2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g\tan\theta}}$　(エ) $2\pi\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{r}}$

(オ) $2\pi\sqrt{\dfrac{g\cos\theta}{r}}$　(カ) $2\pi\sqrt{\dfrac{g\tan\theta}{r}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　解答

1

(1) $mg = R\cos\theta$

(2) $mr\omega^2 = R\sin\theta$

(3) $l\sin\theta$

(4) $\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$

(5) $2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$

(6) $\dfrac{h}{l}$

(7) $\dfrac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}$　$\left(\dfrac{r}{l}\text{でも可}\right)$

(8) $mg = N + R\cos\theta$

(9) $mr\omega^2 = R\sin\theta$

(10) $ml\omega^2$

(11) $m(g-h\omega^2)$

(12) 0

(13) $2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

2

(1) ア：$mgl(1-\cos\theta)$　イ：$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta)$

ウ：$m\dfrac{v^2}{l} = S - mg\cos\theta$　エ：$m\dfrac{v_0{}^2}{l} - mg(2-3\cos\theta)$

(2) $v_0 > \sqrt{5gl}$

(3) $\sqrt{gl(2-3\cos\alpha)}$

3

④

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　確認テスト

【解答】

問１　(オ)　　問２　(ウ)　　問３　(ウ)　　問４　(ア)　　問５　(カ)　　問６　(ウ)

【解説】

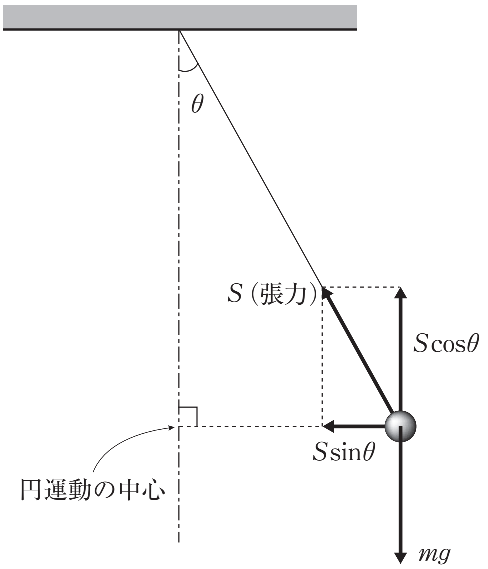
問１

鉛直方向は力がつりあう。

$\therefore\ S\cos\theta = mg$ ――①　　$\therefore\ S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$ [N]

問２

等速円運動の中心へ向かう向き



問３

図より　$S\sin\theta = \boldsymbol{mg\tan\theta}$ [N]

問４

図より，$r = \boldsymbol{l\sin\theta}$ [m]

問５

水平方向について，円運動の方程式より

$mr\omega^2 = mg\tan\theta$

$\therefore\ \omega = \sqrt{\dfrac{g\tan\theta}{r}}$ [rad/s]

問６

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g\tan\theta}}$ [s]

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。